

18.9.

Funkce * (fce) = předpis "f",

který každé hodnotě $x \in \mathbb{R}$

přičítá nejvýše jednu hodnotu

$$y = f(x) \in \mathbb{R}.$$

x = nezávislá proměnná

y = závislá ——— (veličina)

Pro konkrétní hodnotu $x \in \mathbb{R}$

mažeme číslo $f(x)$ funkční hodnotou

fce f u bodě x .

D_f = definicií obor fce f =

= množina těch $x \in \mathbb{R}$, pro
něž je fceí hodnota $f(x)$

definována

Pr: $f(x) = \frac{1}{x}$, není definována
pro $x=0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Různé typy fce

A) lineární fce

$$f(x) = a \cdot x + b$$

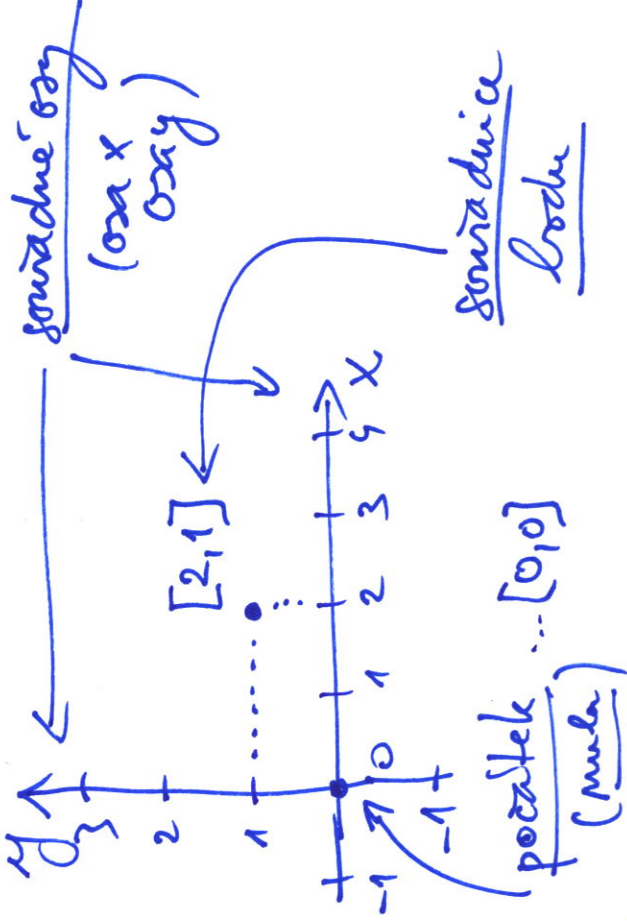
koefficienty $a, b \in \mathbb{R}$ (pevně)

např: $f(x) = -2x + 7$

pro $a=0$ je $f(x) = b$

= konstantní fce

(Kartézská) soustava souřadnic



Grafem lineární fce je přímka.
Pro její nanesení stačí určit
2 body na grafu a spojit
je přímku.

Pr: $f(x) = 2x - 1$

volím $x = 0, f(0) = -1 \dots A = [0, -1]$
 $x = 1, f(1) = 1 \dots B = [1, 1]$



$f(x) = 2x - 1$

Koef. $b =$ absolutní člen (nemá u sebe „ x “)

↳ odpovídá průsečíku přímky s osou y

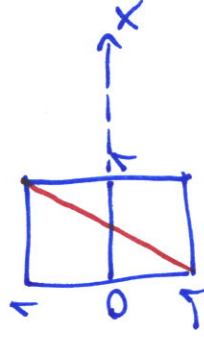
Totiz: $x = 0 \dots f(0) = a \cdot 0 + b = b \dots$ bod $[0, b]$

Koef. $a =$ vedoucí koeficient (u nejvyšší mocniny)
↳ určuje sklon (směrnicí) přímky

Pr: $f(x) = 2x - 1$

sklon (směrnicí)

$a = 2$



Pozn: grafem konstantní fce

je odorozmá přímka:

$f(x) = 2$

$f(x) = 2$



Význam koeficientů lineární fce

$f(x) = ax + b$

Koef. $b =$ absolutní člen (nemá u sebe „ x “)

↳ odpovídá průsečíku přímky s osou y

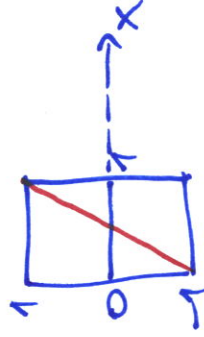
Totiz: $x = 0 \dots f(0) = a \cdot 0 + b = b \dots$ bod $[0, b]$

Koef. $a =$ vedoucí koeficient (u nejvyšší mocniny)
↳ určuje sklon (směrnicí) přímky

Pr: $f(x) = 2x - 1$

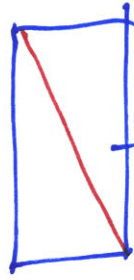
sklon (směrnicí)

$a = 2$

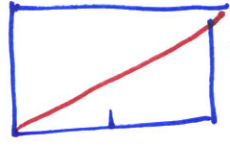


→ 18 příkladů: přímka
troj. úhlopříčným obdelníkem
s poměrem stran 2:1.

Např.: $a = \frac{1}{2}$ $a = -2$ $a = 0$



1:2



2:1

klesá



0:1

Shrnutí:

$a > 0$... přímka roste

$a < 0$... ————— klesá

$a = 0$... ————— vodorovně

(Později: $a = f'(x)$... derivace fce)

B) Kvadratická fce

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, navíc předpokládáme
 $a \neq 0$ (vedoucí koef.)

$c =$ absolutní člen

Kvadratická rovnice:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Postup řešení: diskriminant

$$D = b^2 - 4ac \Rightarrow 3 \text{ možnosti:}$$

1. $D < 0 \Rightarrow$ kv. rovnice nemá
žádné reálné řešení

2. $D = 0 \Rightarrow$ má právě jedno
řešení (tj. dvojnásobný kořen)

$$x_1 = x_2$$

3. $D > 0 \Rightarrow$ kv. rovnice má

dvě různá řešení

$x_1 \neq x_2$ (kořeny (množiny bodů) kvadr. fce)

V případech 2., 3. platí

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

V případě 2. je $D=0 \Rightarrow x_1=x_2$

V případě 2., 3. píšeme

$$f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2)$$

$\hookrightarrow$ rozklad na kořenové činitele

V příp. 2. je tedy $f(x) = a \cdot (x-x_1)^2$

— proto se říká dvójnásobný kořen

Př.: ① $x^2 + 3x + 17 = 0$

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 17 = 9 - 68 = -59 < 0$$

$\Rightarrow$ nemá reálné kořeny

② $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$\Rightarrow$ dvójnás. kořen $x_1=x_2 = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$

$\Rightarrow$ rozklad $f(x) = (x+3)^2$

úvaha: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Rightarrow (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

③ $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$D = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 = x_1 \\ 2 = x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ rozklad: $(x-5)(x-2)$

Viètevy vzorec:

je-li $a=1$, pak:

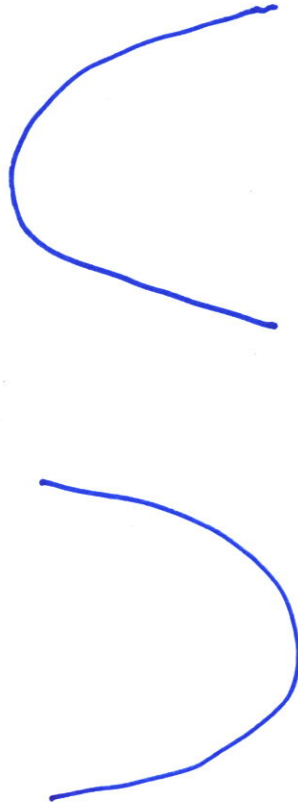
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$$

TO máme poměrně uhořklou
celočíslnou rovnici kv. fce:

$$PF: x^2 - 7x + 10$$

$$\text{napadne nás } 2,5: 2 \cdot 5 = 10 \\ 2 + 5 = 7$$

Grafem kvadratické fce je
parabola (se svíslou osou)



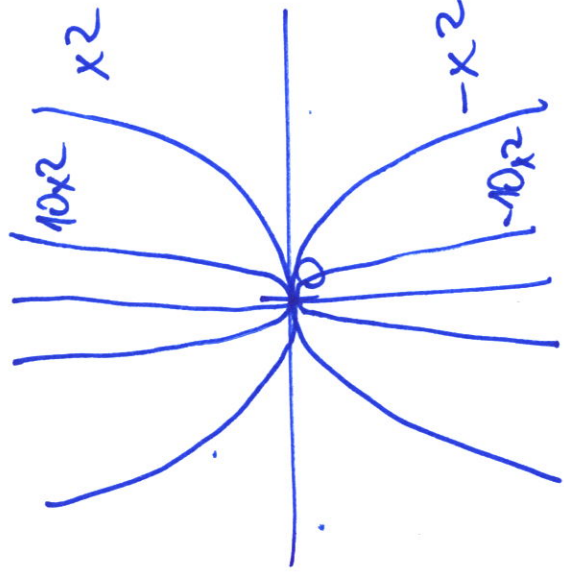
$$\underline{\underline{a > 0}}$$

konvexní

$$\underline{\underline{a < 0}}$$

konkávní

Čím je $|a|$ větší, tím je parabola
užší.



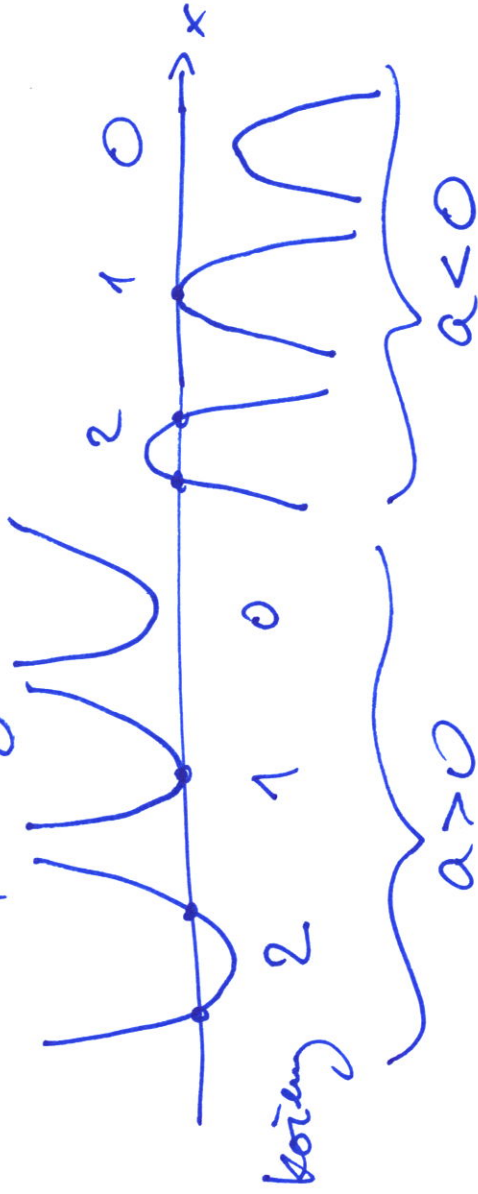
Průsečíky s osami:

$P_y = \text{průsečík s osou } y = [0, c]$
($c = \text{absolutní člen}$)

$P_x = \text{průsečíky s osou } x:$
 $[x_1, 0], [x_2, 0],$

kde $x_1, x_2 = \text{kořeny}$
(dva / jeden / žádný)

Možné případy:



Jak najít souřadnice vrcholu:
 $V = [x_v, y_v]$

1. možnost: doplnění na čtverec

(a=1) převedeme tvar $x^2 + bx + c$
 na $(x - x_v)^2 + y_v$ ← vrcholový tvar
 kvadr. fce

Př: $f(x) = x^2 - 2x - 3 =$
 $= (x^2 - 2x + 1) - 4 =$
 $= (x - 1)^2 - 4$

$\Rightarrow x_v = 1, y_v = -4$
 $\Rightarrow V = [1, -4]$

2. možnost: majme-li

2 reálné kořeny x_1, x_2 :

$\Rightarrow x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Viète: $x_1 + x_2 = -b$

$\Rightarrow x_v = -\frac{b}{2}$ (pro a=1)

A pozor, tento vzťah platí, i když fce nemá reálné kořeny!

Opisu: $x_v = -\frac{b}{2}$

a potom dosazením tohoto do
fce $x^2 + bx + c$: $y_v = f(x_v) = \dots = -\frac{D}{4}$

Pro případ obecného a

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \dots = -\frac{D}{4a}$$

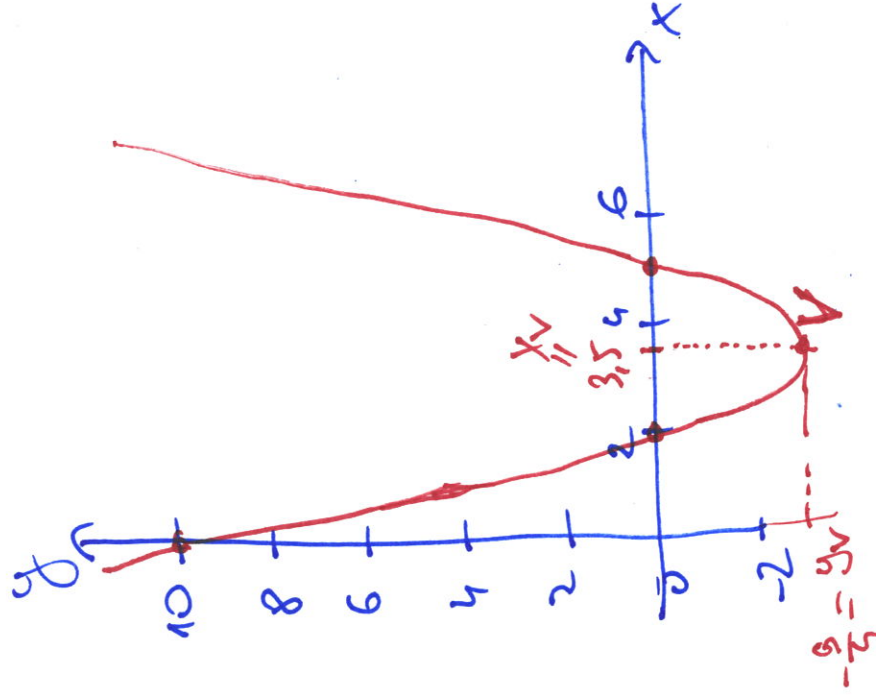
Pr: $f(x) = x^2 - 7x + 10$

kořeny: $2, 5 \Rightarrow p_{x_1} = [2, 0]$
 $p_{x_2} = [5, 0]$

$p_y = [0, 10]$ (protože $c = 10$)

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ konverzní

rozklad: $f(x) = (x-2)(x-5)$



Verchol: $x_v = -\frac{b}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

$$y_v = f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{7}{2} - 5\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{(-3)}{2} = -\frac{9}{4} = -2,25$$

$$\text{Doplňujeme: } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$